

応用解析学通論B

ノート
norm 空間。 Banach 空間・Hilbert 空間
有界性と位相、自己共役性
レーリルベント・スペクトル
リースの表現定理

二回

§1.1 ルム空間 (normed sp.)

1.1 X: ルム空間 / ベクトル空間 加法・スカラー乗法

$$\text{① 結合律: } u + (v + w) = u + (v + w)$$

$$\text{② 交換律: } u + v = v + u$$

$$\text{③ 単位元: } \exists \vec{0} \in X, \forall v \in X, v + \vec{0} = v$$

$$\text{④ 遠元: } \forall v \in X, \exists -v \in X, v + (-v) = \vec{0}$$

$$\text{⑤ 分配律: } a(u + v) = au + av$$

$$\text{⑥ } (a+b)u = au + bu$$

$$\text{⑦ 互換律: } a(bv) = (ab)v$$

$$\text{⑧ スカラー乗法単元: } 1 \cdot v = v$$

1.2 X: ルム空間 (linear sp. / vector sp.)

$S \subset X$: subset 部分集合 ($S \neq \emptyset$)

$M := \{S \text{ の任意の有限の元の } 1 \text{ 次結合の和}\}$

$$= \{x = \sum_{i=1}^n a_i x_i : \forall n \quad \forall \{x_i\}_{i=1}^n \subset S, \quad \{a_i\} \subset \mathbb{R}\}$$

ルム空間部分集合で有り、この M を S によって張られる / S から生み出される ルム部分空間

Def 1.3 X: ルム空間 ルム空間 + ルム ||·||

① 半正定性: $\forall x \in V, \|x\| \geq 0, \|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$.

② 齧次性: $\|ax\| = |a|\|x\| \quad \forall x \in X, a \in \mathbb{R}$

③ 寄加法性(可算加法式): $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Def 1.4 X: normed sp. $S \subset X$: subset $S \neq \emptyset$

S によって張られる ルム部分空間の閉包 (closure) を S によって張られる ルム部分空間と呼ぶ。

§2・Banach 空間 (バナハ空間)

Def 2.1: X: normed sp. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\| = 0$ を満たす時 Cauchy 列 であると言ふ。

Def 2.2. X : normed s.p. において X の任意の Cauchy が X の點に収束する時 X は 完備で (complete) 有り.

Def 2.3: 実備な normed s.p. を Banach s.p. と定める.

Remark: X : Banach s.p. $M \subset X$: closed linear subsp. $\Rightarrow M$: Banach s.p.
(部分空間) 実備 \Leftrightarrow 空間に λ が norm による

例: 数学空間

例 2.1 $\mathbb{R}^n \cdot V^n := \{(\xi_1, \dots, \xi_n) : \xi_i \in \mathbb{R} (i=1, \dots, n)\}$

$$x \in V^n \quad \|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2}$$

V^n の normed であるのを證明:

$$\textcircled{(1)} \quad \|x\| > 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ の性質}$$

$$\|ax\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a\xi_i|^2} = |a| \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2} = |a| \|x\|$$

$$\|x+y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i + \eta_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n |\eta_i|^2} = \|x\| + \|y\|$$

V^n の norm $\|\cdot\|$ は 実備:

$$\textcircled{(2)} \quad x_t = (\xi_1^{(t)}, \dots, \xi_n^{(t)}) \quad \{x_t\} \text{ は Cauchy である}.$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists t_0 \text{ s.t. } t \geq t_0, m \geq t_0 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i^{(t)} - \xi_i^{(m)}|^2} = \|x_t - x_m\| < \epsilon \quad (\star)$$

(*) から 各 i ($i=1 \dots n$) に対して $t_0 \geq t_0, m \geq m_0 \Rightarrow |\xi_i^{(t)} - \xi_i^{(m)}| < \epsilon$.

(つまり), 各 i を (t) 定する時に数列 $\{\xi_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, は Cauchy である.

R: Cauchy 和の収束条件の下で $\xi_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \xi_i^{(m)}$ ($i=1, \dots, n$)

ゆえに $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in V^n$ となる.

(*) より $m \rightarrow \infty$ とすれば

$$(t \geq t_0 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i^{(t)} - \xi_i|} \leq \epsilon)$$

$$\Rightarrow t \geq t_0 \Rightarrow \|x_t - x\| \leq \epsilon$$

(つまり) $x_t \rightarrow x (t \rightarrow \infty)$ すなはち V^n は 実備である. //

例 2.2. (C) 収束する実数列の集合の集合

(つまり) (C) := $\{x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} : \xi_k \in \mathbb{R} (k=1, 2, \dots); \exists \lim \xi_k\}$

$x \in (C)$ の norm $\|x\|$ を $\|x\| := \sup_k |\xi_k|$ とする. (C) は Banach s.p. である

(C) が norm $\|\cdot\|$ に 実して 実備である,

\textcircled{(1)} $\{\xi_k\}$: (C) の Cauchy 列とする.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \text{ s.t. } n \geq n_0, m \geq n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \epsilon.$$

$\xi_n = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} (n=1, \dots)$ とすると norm で 連続なる,

$n > n_0, m > m_0$ の時, $\forall k \in \mathbb{N}$ に

$$(A) \left| \zeta_k^{(n)} - \zeta_k^{(m)} \right| \leq \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

(ちを立てる)

(A)より $n \in (A)$ で $m \rightarrow \infty$ とすれば:

$$n > n_0 \text{ の時 } |\zeta_k^{(n)} - \zeta_l| \leq \epsilon \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$(B) \text{ すなはち } n > n_0 \text{ の時 } \sup_k |\zeta_k^{(n)} - \zeta_k| \leq \epsilon$$

$$\text{又 } |\zeta_k - \zeta_l| \leq |\zeta_k - \zeta_{k_0}^{(n_0)}| + |\zeta_{k_0}^{(n_0)} - \zeta_l^{(n_0)}| + |\zeta_l^{(n_0)} - \zeta_l| \\ \leq 2\epsilon + |\zeta_{k_0}^{(n_0)} - \zeta_l^{(n_0)}|$$

ゆえで $x_{n_0} = \{\zeta_k^{(n_0)}\}_{k=1}^{\infty}$ は (A) の元の収束点

(つまり Cauchy 点とする) $|\zeta_k^{(n_0)} - \zeta_l^{(n_0)}| \rightarrow 0 \quad (k, l \rightarrow \infty)$

すなはち $|\zeta_k - \zeta_l| \rightarrow 0 \quad (k, l \rightarrow \infty)$

とおり $x = \{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ は 収束点より $x \in C$

又 $\|x_n - x\| = \sup_k |\zeta_k^{(n)} - \zeta_k| \leq \epsilon. \quad (n \geq n_0)$

とおり $x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty)$

例 2.3 $\ell^p = \{x = \{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty} : \sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k|^p < \infty, \zeta_k \in \mathbb{R}\} \quad (1 \leq p < \infty)$

(宿題) ℓ^p が Banach sp. を示せ. $\| \cdot \|_p$ P-Minkowski 距離

例 2.4 $\ell^{\infty} = \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} : \sup_k |x_k| < \infty\}$ 収束点ではない
 ℓ^{∞} が Banach sp. を示せ.

証明: $p < \infty$ から始まる.

x^n は ℓ^p の Cauchy 点とする:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad \|x^n - x^m\|_p = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^n - x_k^m|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

つまり, k を (定めれば), x_k^n は Cauchy 点となること. ℓ^p の完備性より.

$$\exists x_k, \quad x_k^n \rightarrow x_k^{\infty} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ とする.}$$

- $x \in \ell^p$:

① x^n は Cauchy 点なので.

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^n - x_k^m|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \|x^n - x^m\|_p \leq C \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

$$n \rightarrow \infty \text{ とすると } \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq C$$

$$k \rightarrow \infty \text{ とすると } \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{\infty}|^p \right]^{\frac{1}{p}} = \|x^{\infty}\|_p \leq C$$

二. x^n は x へ収束する:

② $\epsilon > 0$ に第 N . $\exists n_0$,

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^n - x_k^m|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \|x^n - x^m\|_p \leq \epsilon \quad (\forall n, m > n_0)$$

$n \rightarrow \infty$ として, $k \rightarrow \infty$ とすると $\|x - x^m\|_p \leq \epsilon$ を得.

7. $p=\infty$ $x^n \parallel$ Cauchy とする。

明らかに \mathbb{R} 上で定義された x^n が Cauchy であることを示す。 x は ℓ^∞ 上で有界。

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \|x_n - x_m\|_\infty \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad \|x_n - x_m\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{|x_n(t) - x_m(t)|\} \leq \epsilon$$

三回

Banach sp. の例(複数空間)

例 2.5 $[a, b] \subset \mathbb{R}$: 有界子空間

$C[a, b] := \{x = [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x(t) \in [a, b] \text{ は連続}\}$

$x \in C[a, b]$ と $y \in C[a, b]$ の和 $x+y$ を $(x+y)(t) := x(t)+y(t)$

$x \in C[a, b]$ の積 d x を $(d \cdot x)(t) := d \cdot x(t)$ とする

norm $\|x\| := \|x\|_1 := \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|$ とする

このとき $C[a, b]$ は Banach 空間である。

[完備性] $\{x_n\} \subset C[a, b]$ Cauchy である

$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \text{ s.t. } \sup_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x_m(t)| = \|x_n - x_m\| < \epsilon \quad (\forall n, m > n_0)$

ここで $n \geq n_0, m \geq n_0$ のうえ $|x_n(t) - x_m(t)| < \epsilon \quad (\forall t \in [a, b])$

このとき $t \in [a, b]$ において $\{x_m(t)\}$ が Cauchy であることを示している。

実数 \mathbb{R} の完備性より $\{x_m(t)\}$ は収束点をもつ。

$x(t) := \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t) \quad \forall t \in [a, b]$ と置く。

$m \rightarrow \infty$ とすれば $n \geq n_0$ のうえ $\|x_n(t) - x(t)\| \leq \epsilon \quad (\forall t \in [a, b])$

この連続函数 $\{x_n(t)\}$ が $[a, b]$ 上で $x(t)$ に一様収束する事を示している。

(注) 連続函数の一様収束極限は連続函数である。

従って $x(t) \in C[a, b]$ である。 $\|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

§3: 有界線形算子

練習 X, Y : linear sp.

$X \rightarrow Y$: operator (算像) が linear であると

$$\xrightarrow{\text{def}} A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av \quad (\forall u, v \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

(注) X から Y の持型算像空間は linear sp. である。

金港
1

① $L(X, Y)$ とあると, $A \in L(X, Y)$ がうり

$$(\alpha A + \beta B)(u) = \alpha A u + \beta B u \in L(X, Y)$$

$$\alpha A + \beta B \in L(X, Y)$$

左から \rightarrow 球根はえいて「ハ」, 部分が生ずるので、有界の用意

Prop 3.1 X, Y : normed sp.

$A: X \rightarrow Y$ linear op. が 有界 (bounded) であるとハ

$$\Leftrightarrow \exists c > 0, s.t. \|Au\|_Y \leq c\|u\|_X (\forall u \in X)$$

此時 A を X から Y への 有界の用意 (bounded op) と定義。

X から Y への 有界の用意 (bounded op) の定義は $B(X, Y)$ で表す。

若し $X = Y$ の時 $\|B(X, X)\| = \|B(X)\|$ で表す。

$A: X \rightarrow Y$: bounded linear いえし.

$\|Au\|_Y \leq C\|u\|_X$ を満たす $C > 0$ の 定義を A の (U用意) ノルム (operator norm.) と定め、 $\|A\|$ で表す。

$$\begin{aligned} \|A\| &= \inf \{C > 0 : \|Au\| \leq C\|u\|, u \in X\} = \inf \{C > 0 : \frac{\|Au\|}{\|u\|} \leq C, u \in X, u \neq 0\} \\ &= \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|=1} \|Au\|. \end{aligned}$$

とある。以上で $\|Au\|_Y \leq \|A\|\|u\|_X$ ($u \in X$) が成立。

Prop 3.2. $(B(X, Y), \|\cdot\|)$ は normed sp. である。

<proof> $A, B \in B(X, Y)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$: $u \in X$ の時。

$$\|(\alpha A + \beta B) u \| = \| \alpha (Au) + \beta (Bu) \| \leq |\alpha| \|Au\| + |\beta| \|Bu\| \leq (|\alpha| \|A\| + |\beta| \|B\|) \|u\|$$

だから $\alpha A + \beta B \in B(X, Y)$ である。若し $\alpha = \beta = 1$ の時 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ 。

Prop 3.3. $A \in B(X, Z), B \in B(Y, Z)$ がうり

$$AB \in B(X, Z) \text{ である } \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

若し $A, B \in B(X)$ がうり $AB \in B(X)$

$$\textcircled{1} \|AB\|_Z = \|A(Bu)\|_Z \leq \|A\| \|Bu\| \leq \|A\| (\|B\| \|u\|_X)$$

\textcircled{2} 用意の有界性と連続性の関係。

$A: X \rightarrow Y$: 連続 $\Leftrightarrow u_n \rightarrow u$ がうり $Au_n \rightarrow Au$ (n の極限)

Prop 3.4 $A: X \rightarrow Y$: 弱型用意 いつれども が成立

A : 連続 $\Leftrightarrow A \in B(X, Y)$

<proof>

(有界 \Rightarrow 連続) $u_n \rightarrow u$ がうり $\|Au_n - Au\| \leq \|A\| \|u_n - u\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow 0$)

(連続 \Rightarrow 密着) $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ 上に既定する. 4つめ $V_n \geq V$ のとき

$\exists u_n \in X \setminus \{0\}$. s.t. $\|Au_n\| \geq n\|u_n\|$

ここで $v_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{u_n}{\|u_n\|}$ とおく.

$$\|v_n\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

一方 $v_n \in V$ なので $\|Av_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\|Au_n\|}{\|u_n\|} \geq \sqrt{n}$

$A v_n \rightarrow 0$ の収束性を示す. $A u_n \rightarrow 0$.

従って A の連続性を示す.

Prop 3.5 X, Y : normed sp. Y : Banach 空間 $\Rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$: Banach sp.)

(密着が決定)

1つ目 X : Banach sp. Y : \mathbb{R} $\Rightarrow \mathcal{B}(X)$: Banach sp.).

④ (a)

Prop 3.5.

(pro. +) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ の Cauchy 列とする.

$A_n \in X$ に第 2 条 $\|A_n u - A_m u\| \leq \|A_n - A_m\| \|u\| \rightarrow 0$ $n, m \rightarrow \infty$

とすり, $\{A_n u\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ が Y の ϕ of Cauchy 列とする
従って Y の完備性より $\exists A u = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n u$ ($u \in X$)

(a) A は linear op.

$$\begin{aligned} \text{④) } A(\alpha u + \beta v) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha A_n u + \beta A_n v) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} A_n u + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} A_n v \\ &= \alpha A u + \beta A v \end{aligned}$$

(b) A は bounded op.

④) $\forall \epsilon > 0$. $\exists N$: + 大きい $\|A_n - A_m\| u \leq \epsilon \|u\|$ ($n, m \geq N, u \in X$)

すなはち $\epsilon = 1$ の場合 $\exists N$ 使得すれば

$$\begin{aligned} \|A_n u\| &\leq \|A_n u\| + \|A_n - A_m u\| \\ &\leq (\|A_m u\| + 1) \|u\| \end{aligned}$$

従って $n \rightarrow \infty$ の極限を考へると norm の連続性より

$$(u_n \rightarrow u \ (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \|u_n\| \rightarrow \|u\| \ (n \rightarrow \infty))$$

$$\|A_n u\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n u\| \leq (\|A_N u\| + 1) \|u\|$$

(c) $A_n \rightarrow A \ (n \rightarrow \infty)$ ($\|A_n - A\| \rightarrow 0$)

④) (X) $\exists m \rightarrow \infty$ とすれば norm の連続性より

$$\|(A_n - A) u\| \leq \epsilon \|u\| \ (n \geq N, u \in X)$$

故 $\|A_n - A\| \leq \epsilon$ 上通り $n \rightarrow \infty$ で $A_n \rightarrow A$

Th 3.6. X : norm sp Y : Banach sp.

$\tilde{X} \subset X$: 密密 (dense) な linear sub sp.

$\tilde{A}: \tilde{X} \rightarrow Y$: bounded linear op.

$\Rightarrow \exists A \in \mathcal{B}(X, Y)$ st. $A|_{\tilde{X}} = \tilde{A}$ in \tilde{X}

惟一存在

<證明> \tilde{X} : dense in X より $\forall u \in X \exists \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{X}$ st. $u_n \rightarrow u$ とする
この時 $Au = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}u_n$ と定義するとしてす。

a) 極限の存在

① \tilde{A} が有界 (由来より $\tilde{A} \circ A$) Y の Cauchy でとある

$$\|\tilde{A}u_n - \tilde{A}u_m\| \leq \|\tilde{A}\| \|u_n - u_m\| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

Y : Banach 空る上り \tilde{A}_n の極限は存在

$u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v \quad (n \rightarrow \infty)$ から \tilde{A} の連続性より

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}u_n - \tilde{A}v_n\| &\leq \|\tilde{A}\| \|u_n - v_n\| \\ &\leq \|\tilde{A}\| (\|(u_n - u)\| + \|u - v_n\|) \end{aligned}$$

よって $\lim \tilde{A}u_n = \lim \tilde{A}v_n$ とある

物 $u \in \tilde{X}$ が $\tilde{A}u = \tilde{A}u$

この時 A が linear op で有るかをみる。

norm の連続性から

$$\|Au\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{A}u_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{A}\| \|u_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} C \|u_n\| = C \|u\|$$

よって A が有界 (由来で有る)

b) 一意性

② $A, B \in \mathcal{B}(X, Y)$ が $Au = \tilde{A}u = Bu$ ($u \in \tilde{X}$) とあると

$(A-B)u \in \mathcal{B}(X, Y)$ より $u \in X$ にありて

$$(A-B)u = \lim_{n \rightarrow \infty} (Au_n - Bu_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{A}u_n - \tilde{A}u_n) = 0$$

$A = B$ in X

例 3.1

$X \in \mathbb{Z}^N, Y \in \mathbb{Z}^M \quad A \in \mathcal{B}(X, Y)$,

$$(A_n)_i = \sum_{j=1}^{M_i} a_{ij} u_j \quad (i=1, \dots, M, u=(u_j) \in \mathbb{Z}^N)$$

とかけるので A の行向 (a_{ij}) 以上で表現される。

「有限次元の右の有界線形算子は、(由来により)表現される」

例 3.2 $K \subset \mathbb{R}$: 有界集合, $X := ((K))$ は連続函数の全體

$$\|u\| = \max_{x \in K} |u(x)|$$

$f \in ((K))$ にありて

$$M_f(u)(x) := f(x)u(x) \quad (u \in X, x \in K)$$

とすると $M_f \in \mathcal{B}(X)$ である.

• $k(x,y) \in C(K \times K)$ とする時

$$G_k(u) := \int_K k(x,y) u(y) dy \quad (u \in X, x \in K)$$

と $G_k \in \mathcal{B}(X)$

(4) 時 指し: $\|M_f\|_{\mathcal{B}(X)} = \max_{x \in K} |f(x)|$

$$\|[G_k]\|_{\mathcal{B}(X)} = \|K \cdot \max_{x, y \in K} |k(x,y)|\}$$

K の面積を表す

§4 レゾルベント(resolvent) とスペクトル(spectrum)

特素

X : Banach sp. $Z \in \mathbb{C}$ ((元の位と相反) ($A \in \mathcal{B}(X)$)

$\forall v \in X$: おいた程式 $Av - Zv = v$ を考える

$$(A-Z)v = v$$

(4) 1) $A-Z \in \mathcal{B}(X)$ が逆元素を持つかを調べる問題とする
(実は $A-ZI$. I とかす)

$(A-Z)^{-1}$ が存在する時: Z の resolvent set: λ_3
せぬ時: Z の spectrum set: λ_3 } と定める

Dof 4.1. $Z \in \mathbb{C}$ が: $A \in \mathcal{B}(X)$ の resolvent set $P(A)$ (! λ_3 とハ

$Z \in P(A) \stackrel{\text{def}}{\iff} (A-Z)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ が存在して, $Z \in X$,

$$(A-Z)^{-1}(A-Z) = (A-Z)(A-Z)^{-1} = I$$

$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus P(A)$ を A の spectrum set と呼ぶ

X. $Z \in P(A)$ の時 $(A-Z)^{-1}$ を A の resolvent とする.

prop 4.2 (Neumann の級数法則)

X : Banach sp. $A \in \mathcal{B}(X)$ $\|A\| \leq 1$ とすると.

$\Rightarrow (I-A)^{-1}$ が存在し, $(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n = I + A + A^2 + \dots$

証明: $\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|} < \infty$ より

$\sum_{n=0}^{\infty} A^n \in \mathcal{B}(X)$ である. 且つ $\|\sum_{n=0}^{\infty} A^n\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$ である.

$$(I-A) \sum_{n=0}^{\infty} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=1}^{\infty} A^n = I - A^{n+1}$$

$N \rightarrow \infty$ の時 $\|A^n\| \leq \|A\|^n \rightarrow 0$ より

$$(I-A) \sum_{n=0}^{\infty} A^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (I-A^{n+1}) = I.$$

③ 様に:

$$(\sum_{n=0}^{\infty} A^n)(I-A) = I + \text{示せ} \text{の} \dots \quad (I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \quad //$$

Z(・)

Prop 4.3 $A \in \mathcal{B}(X) \Rightarrow p(A) = \text{open 集合}$
 $(\sigma(A) = \text{close 集合})$

<証明> $z_0 \in p(A)$ として、 z_0 の近傍が " $p(A)$ " に入ると言ふす

$$A - z = (A - z_0) - (z - z_0)$$

$$= (A - z_0) \left\{ I - (z - z_0)(A - z_0)^{-1} \right\} \quad (p = A B \Rightarrow p^{-1} = B^{-1} A^{-1})$$

(かくして $z - z_0$ の実数)

$$\|(A - z_0)^{-1}\| = \frac{1}{\epsilon} \text{ とあると } |z - z_0| < \epsilon \text{ とあるハ}$$

$$\|(z - z_0)(A - z_0)^{-1}\| < 1$$

tr2 (∴ Prop 4.2 より) $\underbrace{\text{（八進法用事か）}}_{\text{存在して}}$

$$(A - z)^{-1} = [I - (z - z_0)(A - z_0)^{-1}]^{-1} (A - z_0)^{-1} \quad (\times)$$

tr2 ($z \in p(A)$ となり、 $p(A)$ は open だから). //

宿題 1. $A \in \mathcal{B}(X)$ とする。

$$R: p(A) \rightarrow \mathcal{B}(A) \quad R(z) = (A - z)^{-1}$$

$$z \mapsto (A - z)^{-1}$$

次の R は連続であることを示せ。つまり $\forall z_0 \in p(A)$ に沿う $\lim_{z \rightarrow z_0} \|R(z) - R(z_0)\| = 0$

<証明> 考察。

$$z_0 \in p(A) \text{ とき } (A - z)^{-1} = [I - (A - z_0)^{-1}(z - z_0)]^{-1} (A - z_0)^{-1} \text{ が成る。}$$

$$\begin{aligned} \text{取}: \quad & \|R(z) - R(z_0)\| = \|[I - (A - z_0)^{-1}(z - z_0)]^{-1} (A - z_0)^{-1} - (A - z_0)^{-1}\| \\ & = \|[I - (z - z_0)(A - z_0)^{-1}]^{-1} - 1\| (A - z_0)^{-1} \\ & \leq \|I - (A - z_0)^{-1}(z - z_0)\|^{-1} \cdot \| (A - z_0)^{-1} \| \end{aligned}$$

$$\|(A - z_0)^{-1}\| = \frac{1}{\epsilon} \text{ とすると、} |z - z_0| < \epsilon \text{ の時 } \|\cdot\| \text{ は}$$

$$\|(A - z_0)^{-1}(z - z_0)\| \leq \frac{1}{\epsilon} |z - z_0| < 1$$

Neumann 級数を用いて、

$$\begin{aligned} & [I - (A - z_0)^{-1}(z - z_0)]^{-1} - 1 \\ & = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \{(A - z_0)^{-1}(z - z_0)\}^n \right] - 1 \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \{(A - z_0)^{-1}(z - z_0)\}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \|R(z) - R(z_0)\| & \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} \|(A - z_0)^{-1}\|^n |z - z_0|^n \right] \cdot \|(A - z_0)^{-1}\| \\ & = \frac{1}{\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|z - z_0|}{\epsilon} \right)^n \\ & = \frac{|z - z_0|}{\epsilon^2 - \epsilon |z - z_0|} \end{aligned}$$

$$\text{取}: \lim_{|z - z_0| \rightarrow 0} \|R(z) - R(z_0)\| = 0$$

宿題2. Banach 実数 X の複素球形の固有値 $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|A\|\}$ を満たすのを示せ。 ($|z| \geq \|A\| \Rightarrow \|A-z\|^{-1} \leq \frac{1}{|z|- \|A\|}$ を示せばよい)

<解答> $\|A\| < |z|$ の時は

$$\left\| \frac{1}{z} A \right\| \leq \frac{\|A\|}{|z|} < 1$$

故に $\left(1 - \frac{1}{z} A\right)^{-1}$ が存在し、 $\left(1 - \frac{1}{z} A\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z} A\right)^n$

$\therefore (z-A)^{-1} = [z(1 - \frac{1}{z} A)]^{-1} = (1 - \frac{1}{z} A)^{-1} z^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{z^{n+1}}$ が存在する。

$$\begin{aligned} \therefore \|(z-A)^{-1}\| &= \left\| z^{-1} (1 - \frac{1}{z} A)^{-1} \right\| \\ &\leq \frac{1}{|z|} \cdot \frac{1}{1 - \left\| \frac{1}{z} A \right\|} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|z| - \|A\|}$$

$$\therefore (z-A)^{-1} \in B(X) \quad \therefore z \in \rho(A)$$

$$\therefore \sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|A\|\}$$

§5 Hilbert 1p. (ヒルベルト空間)

Def 5.1 (抽象)

X : 球型空間 寄像を考える

寄像 $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$

$$u, v \mapsto (u, v)$$

寄像 (\cdot, \cdot) が 可積 であるとい

(i) $\forall d, \beta \in \mathbb{C}, \forall u, v, w \in X$ に対して

$$(d u + \beta v, w) = d(u, w) + \beta(v, w)$$

(ii) $\forall u, v \in X$ に対して $(u, v) = \overline{(v, u)}$

(iii) $\forall u \in X$ に対して $(u, u) \geq 0$. $\exists \rightarrow (u, u) = 0 \iff u = 0$.

可積: 対称するノルムを

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}$$

norm の条件を満たすの

$$\|du\| = \sqrt{(du, du)} = \sqrt{\delta(u, u)} = |d| \|u\|$$

$\|u\| \geq 0$ であり、 $\|u\| = 0 \iff u = 0$

以上 3 条件を示せばよい。

Prop 5.2 (Schwarz 不等式) $u, v \in X$ に対して $|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

<証明> $\forall d \in \mathbb{C}$ で

$$0 \leq \|du + v\|^2 = (du + v, du + v)$$

$$= |d|^2 (u, u) + 2(u, v) + \overline{(v, u)} + (v, v)$$

$= |\alpha|^2 \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\alpha(u, v))$ (よくあるパターン)
 $(u, v) = 0$ の場合、 λ の値からなので $(u, v) \neq 0$ と仮定し、
 $\alpha = \frac{(u, v)}{\|u, v\|} \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) を考へると。

$$\text{此時 } \|u\|^2 \lambda^2 + 2(u, v) \lambda + \|v\|^2 \geq 0 \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C})$$

式より $|u, v|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0$.

$$\Rightarrow |(u, v)|^2 \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad //$$

Prop S.3. (\cdot, \cdot) : 内積により定め: $\|\cdot\|$ は norm である。

$$\begin{aligned} < \underline{\text{左側}} > \|u+v\|^2 &= (u+v, u+v) = \|u\|^2 + (u, v) + (v, u) + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(u, v) \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

Def S.4 X : 球面を定める (\cdot, \cdot) : X の内積

X 或 \mathbb{R} $(X, (\cdot, \cdot))$ を 内積空間 (inner product sp.) とする。
 $(X, (\cdot, \cdot))$ が此の内積 (\cdot, \cdot) により定まる norm $\|\cdot\|$ をもつて.

Banach sp. とする時, Hilbert sp. とする。

(つまり、完備な内積空間)

$u, v \in X$ に対して

u, v が直交する $\Leftrightarrow \underset{\text{def}}{(u, v) = 0}$

(orthogonal!)

(注) $u \in X$ は $L, (u, v) = 0 \quad \forall v \in X \Leftrightarrow u = 0$.

Prop S.5 (中立定理)

X : 内積空間

$$(X) \quad \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad \forall u, v \in X$$

Prop S.6. X : 11ルム球面空間

X が内積空間 \Leftrightarrow 中立定理が成立

$$(u, v) := \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) - \frac{1}{4}(\|u+i v\|^2 - \|u-i v\|^2) \quad (u, v \in X)$$

Def S.1 $x, y \in \mathbb{C}^N \quad x = (x_1, \dots, x_N), \quad y = (y_1, \dots, y_N)$

$$(x, y) = \sum_{j=1}^N x_j \bar{y}_j \quad \text{が 内積の定義を満たし、} \mathbb{C}^N \text{ は Hilbert sp. となる。}$$

(4) (\cdot, \cdot) : 有積: 若く $\sqrt{|(u, v)|} = \|u\|$

$U_n \rightarrow u, V_n \rightarrow v \Rightarrow (U_n, V_n) \rightarrow (u, v)$
 $(n \rightarrow \infty)$ (有積の連續性)

$$\begin{aligned} (5) |(U_n, V_n) - (u, v)| &\leq |(U_n, V_n) - (U_n, v)| + |(U_n, v) - (u, v)| \\ &= |(U_n, V_n - v)| + |(U_n - u, v)| \\ &\leq \|U_n\| \|V_n - v\| + \|U_n - u\| \|v\|. \end{aligned}$$

/ 仮定から / 仮定から
ゆえかたのである. $\exists M \|U_n\| \leq M$

2 (4)

例 5.2 $L^2(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} : \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty\}$

$$\langle f, g \rangle := \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (f, g \in L^2(\Omega))$$

によつて Hilbert sp. となる.

$$\langle \text{左端} \rangle |f(x)\overline{g(x)}| \leq \frac{1}{2}(|f(x)|^2 + |g(x)|^2) \text{ だから}$$

$$\int_{\Omega} |f(x)\overline{g(x)}| \leq \frac{1}{2}(\|f\|^2 + \|g\|^2) < \infty$$

より有積が定義としてできる

(f, g) が有積の條件を満たすと内積の特徴により明らか
 $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ の norm とする連續性ハ Lebesgue 積分の性質を用ひて示された.

例 5.3. $\ell^2 = \{x = (x_1, x_2, \dots) \mid \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\}$

ハ有積 $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$ ($x, y \in \ell^2$) によつて Hilbert sp. となる

(1) (x, y) は有積の性質を満たす (Banach の性質, ふしだ)
norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ にて定義である.

カイキチャウキテ
正規直交基底 (orthonormal basis)

def 6.1. X : Hilbert sp.

$\{u_i\} \subset X$ ($i = 1, 2, \dots$) が 正規直交系 (O.N.S.)

$\begin{cases} (1) i = 1, 2, \dots \text{ に対して } \|u_i\| = 1 \\ (2) \forall i \neq j \text{ に対して } \langle u_i, u_j \rangle = 0 \end{cases}$ ($u_i, u_j = \delta_{ij}$)

$\{u_i\} \subset X$ が 正規直交系 (O.N.S.) or 正規直交基底

$\Leftrightarrow \{u_i\}$ は 正規直交で

$\forall v \in X, \exists d_1, d_2, \dots$ s.t.

$$\|v - \sum_{j=1}^{\infty} d_j u_j\| \rightarrow 0 \quad (|V| \rightarrow \infty)$$

係数 d_j について.

$v \in X$ は $\exists d_i$ s.t. $\|v - \sum_{j=1}^N d_j u_j\| \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) とする
 $\forall n < N$ は $\exists d_n$.

$$(v - \sum_{j=1}^N d_j u_j, u_n) = (v, u_n) - \sum_{j=1}^N d_j (u_j, u_n)$$

$$= (v, u_n) - d_n$$

$N \rightarrow \infty$ は $\exists d$.

$$|(v - \sum_{j=1}^N d_j u_j, u_n)| \leq \|v - \sum_{j=1}^N d_j u_j\| \cdot \|u_n\| \rightarrow 0$$

よって $d_n = (v, u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{つまり}, v = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N (v, u_j) u_j \quad (v \in X)$$

Prop 6.2. (Bessel の不等式)

$$\{u_j\}: \text{正規直交系} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |(v, u_j)|^2 \leq \|v\|^2 \quad (v \in X)$$

O.N.S.

$$\begin{aligned} \langle \text{証明} \rangle & 0 \leq \|v - \sum_{j=1}^m (v, u_j) u_j\|^2 \\ &= \|v\|^2 - \sum_{j=1}^m \{(v, u_j)(v, u_j) + (v, u_j)(u_j, v)\} + \sum_{j=1}^m |(v, u_j)|^2 \\ &= \|v\|^2 - \sum_{j=1}^m |(v, u_j)|^2. \end{aligned}$$

$\therefore \sum_{j=1}^m |(v, u_j)|^2 \leq \|v\|^2 \quad (\text{更に } m \rightarrow \infty)$ //

Prop 6.3 (Parseval の不等式)

$$\{u_j\}: \text{正規直交系} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |(v, u_j)|^2 = \|v\|^2$$

O.N.S.

$\langle \text{証明} \rangle$

$$\|v - \sum_{j=1}^m (v, u_j) u_j\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{j=1}^m 2R_j (d_j, (v, v)) + \sum_{j=1}^m |d_j|^2$$

$\text{cov} vs$ の $\frac{1}{2}$ 番目と係数 d_j の乗積より.

$$\|v - \sum_{j=1}^m (v, u_j) u_j\|^2 \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

$$\text{又}, \|v - \sum_{j=1}^m (v, u_j) u_j\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{j=1}^m |(v, u_j)|^2 \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) //$$

総合:

$\{u_j\}: O.N.S \Rightarrow \forall v \in X$ は $\sum_{j=1}^{\infty} |(v, u_j)| u_j$ が収束する.

$\{u_j\}: \text{CONS} \Rightarrow X = \{u = \sum_{j=1}^{\infty} d_j u_j : \sum_{j=1}^{\infty} |d_j|^2 < \infty\}$.

$\forall v \in X \quad v = \sum_{j=1}^{\infty} (v, u_j) u_j$ が現れる.

Th 6.4. \bar{X} が Hilbert sp. は \bar{X} の直交系が存在する.

norm \bar{X} が可分 (separable) $\Leftrightarrow \exists X_0 \subset X$: 互いに離れた集合 s.t. X_0 : dense in X .

稠密部と集合 $A \subset X$: $\forall v \in X, \exists A' \subset A$ の \bar{X} の子集合

Prop 6.5. u_1, u_2, \dots, u_m : 正規直交系

$\Rightarrow \forall v \in X, \quad \forall d_1, d_2, \dots, d_m$ にあり.

$$\|v - \sum_{j=1}^m (v, u_j) u_j\| \leq \|v - \sum_{j=1}^m d_j u_j\|.$$

(投影→距離)

$$\begin{aligned} <\text{証明}> \quad & \|v - \sum_{j=1}^m d_j u_j\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{j=1}^m 2\operatorname{Re}(d_j(u_j, v)) + \sum_{j=1}^m |d_j|^2 \\ & = \|v\|^2 + \sum_{j=1}^m |d_j - (u_j, v)|^2 - \sum_{j=1}^m |(u_j, v)|^2. \end{aligned}$$

取り: 離れ値 $\lambda_j = (u_j, v)$ //

<Th 6.4 の証明> Schmidt 転化法.

$\{w_j : j=1, 2, \dots, n\} \subset X$: $\operatorname{dim} X$ が n の集合

$\{w_j\}$ が一一次独立として、 w_n が一二次独立でない場合、つまり。

$w_{n+1} = \sum_{j=1}^n d_j w_j$ と書ける時 $\{w_{n+1}\}$ を集く。

これを $n-1$ 次独立でない要素を w_{n-1} と書いていける。

補足: ベクトルの集合 $\{w'_1, w'_2, \dots, w'_n, \dots\}$ は一二次独立集合とする。

* $\{w'_j\}$ を正規直交化する。

$\hookrightarrow \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ を正規直交系

- $\forall n \in \mathbb{Z}, \operatorname{Span}\{w'_1, w'_2, \dots, w'_n\} = \operatorname{Span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

補足: 空間の全直交子空間

① $\operatorname{Span}\{w'_1, \dots, w'_n\} \subset \operatorname{Span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, (なぜか)

この時 $\operatorname{Span}\{u_1, \dots, u_n\}$ が \mathbb{R}^n の全直交子空間の次元 n 。

TR 1: $u_1, u_2, \dots, u_n \perp \operatorname{Span}\{w'_1, w'_2, \dots, w'_n\}$ の意味

$$\therefore \operatorname{Span}\{w'_1, w'_2, \dots, w'_n\} = \operatorname{Span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

* $\forall u \in X, \exists \{\beta_j\}_{j=1}^\infty \in \mathbb{C}$ s.t. $\|u - \sum_{j=1}^\infty \beta_j u_j\| \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$)

② $\forall u \in X, \forall \epsilon > 0$ が存在。 その性より $\exists w_m$ s.t. $\|u - w_m\| < \epsilon$.

$\{w'_1, w'_2, \dots, w'_m\}$ の標準化法 $\perp w_m$ 。

$$w_m = d_1 w'_1 + \dots + d_m w'_m \quad (d_1, \dots, d_m \in \mathbb{C})$$

この時 $\operatorname{Span}\{w'_1, w'_2, \dots, w'_m\} = \operatorname{Span}\{u_1, \dots, u_m\}$ 上。

$$w_m = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_m u_m. \quad (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \in \mathbb{C})$$

と書ける

$$\therefore \|u - \sum_{j=1}^m \beta_j u_j\| < \epsilon$$

ゆえに $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ は CONS である //

正規直交系

例 6.1. (三角函數) $L^2(I) = \{f(x) : \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty\}$.

$L^2(I)$ ($I = [-\pi, \pi]$) : Hilbert sp.

直積 $\{uv \in L^2(I)\}$ に対して $\langle u, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \overline{v(x)} dx$.

次の正規系 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ は $L^2(I)$ の CONS.

証明より

$\forall u \in L^2(I)$

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} \langle u, \varphi_m \rangle \varphi_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} u(x) dx \right) e^{inx}.$$

Fourier 級数

例 6.2. (余弦式) $L^2(I)$ ($I = [-1, 1]$) Hilbert $\| \cdot \|_p$ 直交へと

余弦式 $\{x^n : n = 0, 1, \dots\}$ に対して Schmidt 正交化法を用意する。

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

即ち $\{\varphi_n(x)\}$ を ~~正规系~~ ルジャンドル (Legendre) 余弦式と呼び $L^2(I)$ の CONS とする。

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} x, \quad \varphi_2(x) = \sqrt{\frac{5}{8}} (3x^2 - 1), \dots$$

例 6.3 (Hermitte-Erlmite 余弦式)

$$X = L^2(0, \infty)$$
 とし、直積 $\langle u, v \rangle = \int_0^\infty u(x) \overline{v(x)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

余弦式 $\{x^n : n = 0, 1, \dots\}$ に対して Schmidt 正交化法を用意する。

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-\frac{x^2}{2}})$$

宿題 1. 複合 $\mathbb{L}^2 = \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} : x_k \in \mathbb{R}, (k=1, \dots), \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$ に対して、直積を。

$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ とする。n番目の部分が 1 で他の部分が全て 0 である元の元を e_n とするとき $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ は \mathbb{L}^2 の直交正規系であることを示せ。

<解答> まず $\forall i \in \mathbb{N}_+, \quad (p_i, p_j) = 1$.

$$\forall i \neq j, \quad (p_i, p_j) = 0.$$

$x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{L}^2$ のとき、 $d_j = x_j$ とすると。

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{j=0}^n d_j e_j\|^2 &= (x - \sum_{j=0}^n d_j e_j, x - \sum_{j=0}^n d_j e_j) \\ &= (x, x) - 2(x, \sum_{j=0}^n d_j e_j) + (\sum_{j=0}^n d_j e_j, \sum_{j=0}^n d_j e_j) \\ &= \sum_{j=0}^n |x_j|^2 - 2 \sum_{j=0}^n |x_j|^2 + \sum_{j=0}^n |x_j|^2 \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{j=0}^n |x_j|^2 < \infty, \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^2 = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{j=0}^n a_j p_j \right\| = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{j=0}^n a_j p_j \right\|^2} = 0.$$

$\therefore \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ は ℓ^2 の完全な基底である。

宿題2. ルジャンドル多項式の完全性であることを示せ。

<解説> $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ とすれば

$$\int_{-1}^1 \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(x)} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m dx.$$

- 積分を交わす。 $m > n$ と仮定すれば

$$= \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m dx = \left[\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (x^2 - 1)^m \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (x^2 - 1)^m d \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

$$= - \int_{-1}^1 \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (x^2 - 1)^m \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^n dx$$

$$= (-1)^m \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^m \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2 - 1)^n dx$$

$\therefore m \neq 0$ の時 $\int_{}^{} = 0$. つまり $(\varphi_n(x), \varphi_m(x)) = 0, \forall m \neq n$

したがって $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ は正交系である。

§7.1-ス (Riesz) の表現定理 (representation theorem)

X : normed IP. に対して. X^* を

$$X^* := B(X, \mathbb{C}) \leftarrow f: X \rightarrow \mathbb{C}: \text{bdd. linear.}$$

と定め. X^* を X の共役空間又は雙端空間と呼ぶ。
(conjugate space) (dual space)

X^* の元を形態函数 (linear functional) と呼ぶ。

$$X^* \text{ の norm } \|f\| = \|f\|_{X^*}$$

$$= \sup_{\substack{u \in X \\ u \neq 0}} \frac{|f(u)|}{\|u\|} = \sup_{u \in X} |f(u)| \quad (\because f \in \text{Banach sp と看作る})$$

X が Hilbert SP の場合 X^* の全ての元が (單純的) 素子が生じる。

$f(u) \quad f \in X^*, u \in X \quad \langle f, u \rangle$ は素子の表現。

Theorem (Riesz) X : Hilbert sp. $\forall f \in X^*$ は $\exists! w \in X$ s.t.

$$f(u) = \langle u, w \rangle \quad \forall u \in X \quad \text{が成り立つ}$$

且つ $\|f\|_{X^*} = \|w\|_X$ である

X : Hilbert sp. とする. $M \subset X$: 閉じた集合

$U, V \in X$ とおき

$$U \perp V \stackrel{\text{def}}{\iff} (U, V) = 0.$$

$$U \perp M \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall v \in M, (U, v) = 0.$$

垂直

Prop 7.2. (正交定理) X : Hilbert sp. $M \subset X$: closed subsp.

$\forall U \in X \setminus M$ に対して $\exists v_1 \in M, \exists v_2 \in X$ 使得する

$U = v_1 + v_2, v_2 \perp M$ が成立す.

☞ v_2 を U の Mへの直交部 とす.

（垂直性の定理）

X を可分 Hilbert 空間と仮定する. (CONS) を用いて証明せよ.

M は Hilbert sp. の閉じた空間より. M が Hilbert であり.

上, 2 Schmidt の直交化より, M の CONS. $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する.

Bessel 不等式より

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(U, v_n)|^2 \leq \|U\|^2 < \infty$$

で、あるから $\sum_{n=1}^m (U, v_n) v_n, m=1, 2, \dots$ は Cauchy である.

(1) $V_m = \sum_{n=1}^m (U, v_n) v_n$ と置くと, $m > p$ のとき

$$\|V_m - V_p\|^2 = \left\| \sum_{n=p+1}^m (U, v_n) v_n \right\|^2$$

$$= \left(\sum_{n=p+1}^m (U, v_n) v_n, \sum_{n=p+1}^m (U, v_n) v_n \right)$$

$$= \sum_{n=p+1}^m \sum_{k=p+1}^m (U, v_n) (\overline{U, v_k}) (v_n, v_k)$$

$$= \sum_{n=p+1}^m (U, v_n) (\overline{U, v_n}) = \sum_{n=p+1}^m |(U, v_n)|^2 \rightarrow 0 \quad (m, p \rightarrow \infty)$$

• $\exists v = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m (U, v_n) v_n \in M$ (M の元像より)

ここで $w = U - v$ と置くと, $w \perp M$ と示せばよい.

$$\text{実験}: 1: (w, v_k) = (U, v_k) - \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m (U, v_n) v_n, v_k \right)$$

$$= (U, v_k) - \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m (U, v_n) (v_n, v_k)$$

$$= (U, v_k) - (U, v_k) = 0.$$

よって $\forall k \in \mathbb{N}$ で, $(w, v_k) = 0$.

$\forall h \in M, \exists h = \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n, \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 < \infty$ の時に \exists す。

$$(w, h) = (w, \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n (w, v_n) = 0.$$

* v, w の一基底

v, w の組合せの性質 (v, w が同一條件を満たすと仮定する)。

$$u = v + w = v' + w, \quad w \perp M, \quad w' \perp M.$$

$$\text{より } \underline{w' - w} = \underline{v' - v}$$

M 上底 M の垂直

$$2. (v - v') \perp (w' - w)$$

$$(v - v', w' - w) = 0 \quad (= (v - v', v - v'))$$

$$\therefore w' - w = v - v' = 0.$$

//

<素取立題の證明> $f \in X^*, \exists w \in X$ st. $f(u) = (u, w)$:

$f = 0$ の場合 $w = 0$ と書かれていよいし、 $f \neq 0$ と仮定せん。

$$N := \ker f = \{u \in X : f(u) = 0\}$$

と見てく。 N は closed subspace で $f \neq 0$ が $N \neq X$ を立つ。

(明らかに $N \neq \emptyset$ $\because 0 \in N$)

反対 $u_0 \notin N$ とし、証明立題よ。

$$u_0 = v_0 + w_0 \quad (v_0 \in N, w_0 \perp N, w_0 \neq 0)$$

$$u_0 \notin N \Rightarrow 0 \neq f(u_0) = f(v_0 + w_0) = f(v_0) + f(w_0) = f(w_0)$$

そこで $\alpha(u) := f(u)/f(w_0)$ ($u \in X$) と置くと

$$f(u) - \alpha(u)f(w_0) = f(u) - \alpha(u)f(w_0) = \cancel{f(w_0)} 0 \text{ が成立}.$$

つまり $\forall u \in X$ で $f(u) - \alpha(u)f(w_0) \in N$ が立つ。

$$u - \alpha(u)w_0 \in N \text{ が立つ}.$$

w_0 の定義より

$$0 = (u - \cancel{\alpha(u)w_0}, w_0)$$

$$= (u, w_0) - \alpha(u) \|w_0\|^2$$

$\alpha(u)$ の定義より \exists と

$$f(u) = f(w_0) \|w_0\|^{-2} (u, w_0)$$

$$= (u, \overline{f(w_0)} \|w_0\|^2 w_0)$$

即ち $w := \overline{f(w_0)} \|w_0\|^2 w_0$ と置けば

$f(u)$ の表現が w 様の形で表せることが分かる。

八回

(一意性) $w, w' \in X$ が存在して.

$$f(u) = (u, w) = (u, w') \quad (\forall u \in X) \text{ となる}.$$

$$\forall u \in X, \quad (u, w - w') = 0$$

$$\text{よし}, \quad u = w - w' \in \text{は}\lambda\text{にされ}.$$

$$\|w - w'\| = 0. \quad \text{よし} \quad w = w'$$

(B) $\forall u \in X$ の定理.

§8 有界な要素 (Hilbert sp.)

Prop 8.1. X, Y : Hilbert sp. $A \in B(X, Y)$ が存在して.

$\exists B \in B(Y, X)$ s.t. $(Au, v) = (u, Bv) \quad \forall u \in X, v \in Y$

$$\text{かつ} \quad \|B\| \leq \|A\|.$$

\leftarrow $\forall v \in Y$ が存在して.

$$f: X \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{と} \quad f \in X^* (= B(X, \mathbb{C}))$$

$$\begin{aligned} \text{①} \quad |(Au, v)| &\leq \|Au\| \cdot \|v\| \leq \|A\| \cdot \|u\| \cdot \|v\| \\ &\therefore \frac{|(Au)|}{\|u\|} \leq \|A\| \|v\| \end{aligned}$$

Repost の表現定理 $\exists w_m \in X$ s.t. $(Au, v) = (u, w_m)$

(中) が存在して $B: Y \rightarrow X$ を $w = Bv$ で定める.

B : 存在性

$$\begin{aligned} \text{②} \quad (u, B(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)) &= (Au, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \\ &= \overline{\alpha_1} (A u, v_1) + \overline{\alpha_2} (A u, v_2) \\ &= \overline{\alpha_1} (u, B v_1) + \overline{\alpha_2} (u, B v_2) \\ &= (u, \alpha_1 B v_1 + \alpha_2 B v_2) \end{aligned}$$

B : 有界性

$$\text{③} \quad \|Bv\|^2 = |(Bv, Bv)| = |(ABv, v)| \leq \|A\| \cdot \|Bv\| \cdot \|v\|$$

$$\therefore \|Bv\| \leq \|A\| \|v\|$$

$$\therefore \|B\| \leq \|A\|$$

(有界な要素)

Def 8.2. \because の B を位用素, A の 位位用素 (adjoint operator) と言ひ, A^* で表す.

存在性: $(Au, v) = (u, A^*v) \quad \forall u \in X, \forall v \in Y$.

$$\text{例: } A = \sum a_{ij} v_i \quad (A \in M_n(\mathbb{C})), \quad u, v \in \mathbb{C}^n \text{ が存在して} \quad (u, v) = \sum_{j=1}^n u_j \bar{v}_j$$

$$\begin{aligned}
 (A_{U,V})_i \bar{v}_j &= \sum_{k=1}^n (A_{U,V})_{ik} \bar{v}_j = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^m a_{lk} v_k \right) \bar{v}_j \\
 &= \sum_{k=1}^n u_{ik} \left(\sum_{j=1}^n a_{jk} \bar{v}_j \right) = \sum_{k=1}^n u_{ik} \left(\overline{\sum_{j=1}^n a_{jk} v_j} \right) \quad \text{共役轉置} \\
 &= (u, A^* v)
 \end{aligned}$$

Prop 8.3. X, Y : Hilbert sp. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $A, B \in B(X, Y)$
 $\Rightarrow (\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$, $(A^*)^* = A$, $\|A^*\| = \|A\|$

<Proof>

$$\begin{aligned}
 ① (\alpha A + \beta B)_{U,V} &= \alpha (A_{U,V}) + \beta (B_{U,V}) \\
 &= (u, \bar{\alpha} A^* v) + (u, \bar{\beta} B^* v) \\
 &= (u, (\bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*) v)
 \end{aligned}$$

$$② ((A^*)^*)_{U,V} = (u, A^* v) = (A_{U,V}) \quad (A_{U,V} \in X, B_{U,V} \in Y)$$

$$③ \|A\| = \|(A^*)^*\| \leq \|A^*\| \leq \|A\|. \quad //$$

Def 8.4. X : Hilbert sp. $A \in B(X)$ が 自己共役 (self-adjoint)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} A^* = A \quad (\iff (A_{U,V}) = (u, A v), \forall u, v \in X)$$

$A \in B(X, X)$ が ユニタリ (unitary operator)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists A^{-1} \in B(Y, X) \text{ s.t. } A^* = A^{-1}$$

$$(\|A_{U,U}\|^2 = (A_{U,U}) = (u, A^* A_{U,U}) = (u, u) = \|u\|^2)$$

$\therefore \|A_{U,U}\| = \|u\|$: 逆像 (逆像)

1度目: $A \in B(X)$ とする,

$$z \in \rho(A) \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists [A-z]^{-1} \in B(X) \text{ s.t. } ([A-z]^{-1}(A-z)) = (A-z)(A-z)^{-1} = I.$$

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

Prop 8.5. X : Hilbert sp. $A \in B(X)$

$$\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)} \quad (= \{ \bar{z} : z \in \sigma(A) \})$$

<Proof>

$z \in \rho(A)$ とする $\forall u, v \in X$ に対して. $(A-z)^* = A^* - \bar{z}$

$$[(A-z)^*]^* (A^* - \bar{z})_{U,V}$$

$$= ((A^* - \bar{z})u, (A-z)^* v)$$

$$= (u, (A-z)(A-z)^* v)$$

$$= (u, v)$$

目標 1:

$$((A^* - \bar{z})^{-1} (A - z)^*)^* u, v = (u, v)$$

$$\text{とゆうの}\bar{z} \quad (A^* - \bar{z})^{-1} = [(A - z)^*]^* \in \mathcal{B}(X) \text{ とゆう}$$

$$\bar{z} \in \rho(A^*) \text{ すなはち } \overline{\rho(A)} \subset \rho(A^*)$$

左辺の I を A^* に置き換えて $(A^*)^* = A$ を用いると.

$$\rho(A) = \overline{\rho(A^*)} \subset \rho(A^*) \subset \overline{\rho(A)}$$
 とゆう.

$$\overline{\rho(A)} = \rho(A^*) \text{ うなづく } \overline{\rho(A)} = \sigma(A^*) \text{ とゆう} //.$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ が " $A \in \mathcal{B}(X)$ の 固有値" (eigen value)

$$\Leftrightarrow \exists u \in X, u \neq 0 \text{ s.t. } Au = \lambda u.$$

ゆうひん $(A - \lambda)u = 0$. たかし $(A - \lambda)$ は可逆で望む. $\lambda \in \sigma(A)$.

(2) すべての $z \in \sigma(A)$ が " 固有値" と呼ばれる.

$$z \in \rho(A) \Leftrightarrow (A - z)^* \in \mathcal{B}(X)$$

$$\text{s.t. } (A - z)^* (A - z) = (A - z)(A - z)^* = I.$$

prop 8.6. A : 自己共役な算算子 $\Rightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{R}$

証明

<必要性> $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow z \notin \rho(A)$ を示せばよい.

$(A - z)$: $X \rightarrow X$: 1. 有り 2. 有り 3. 有りを満たす.

1. 有り:

$$(1) |(u, (A - z)u)| \geq |I_m(u, (A - z)u)| = |\Im z| - \|u\|^2$$
$$(u, Au) = (Au, u) = (\overline{A}u, u) \in \mathbb{R} \text{ を用いた}$$

$$|(u, ((A - z)u))| \leq \|u\| \cdot \|(A - z)u\| \quad (\text{Schwarz の不等式})$$

$$\therefore \|u\| \cdot \|(A - z)u\| \geq |\Im z| \cdot \|u\|^2$$

$$\therefore \|(A - z)u\| \geq |\Im z| \cdot \|u\| \quad (\times)$$

ゆゑて $\Im z \neq 0$ より $u \neq 0 \Rightarrow (A - z)u \neq 0$ とゆう 1. 有り. //

(2) f : 弱型密像について.

$$f: |\phi| \Leftrightarrow Tu \neq 0 \Rightarrow fTu \neq 0$$

主付: まず $(A - z)X$ が X の弱型密像であることを示す.

(3) $v_n = (A-z)v_n \rightarrow v \in X$ とする

$$(*) \text{ と } \|v_n - v_m\| \geq |z_m - z| \cdot \|v_n - v_m\|$$

このことより $\{v_n\}$ は Cauchy 異列と見なす。
 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

$(A-z)$ の逆像は $v = (A-z)v$ である

$$v \in (A-z)X$$

//

次に $(A-z)x = x$ をあることを示す。

$(A-z)x \neq x$ と仮定すると。

$\exists w \notin (A-z)x$, $w \neq 0$ が存在する。

$(A-z)x = x$ の両辺を引くと w である。

対称性を取って $\exists w \perp (A-z)x$, $w \neq 0$.

かつ

$$((A-\bar{z})w, u) = (w, (A-z)u) = 0 \quad (\forall u \in X)$$

と, て $(A-\bar{z})w = 0$. ($\forall u \in X$ であると。

$$0 = \| (A-\bar{z})w \| \geq |z_m - z| \|w\| \text{ と } \|w\| = 0. \text{ 矛盾 } //$$

以上から, $(A-z)^{-1}$ が存在する。

$(A-z)^{-1}$ の有界性: $(*)$ として $u = (A-z)^{-1}v$ と置くと。

$$\|u\| = \|(A-z)(A-z)^{-1}v\| \geq \|(A-z)^{-1}v\| \cdot |z_m - z| \quad (\forall v \in X)$$

$$\therefore \|(A-z)^{-1}v\| \leq |z_m - z|^{-1} \|v\|$$

$$\therefore \|(A-z)^{-1}\| \leq |z_m - z|^{-1}$$

従って, $z \in \rho(A)$

//

Def 8.7 X : Banach sp. $A \in B(X)$ に対して.

$r(A) := \sup \{|z| : z \in \rho(A)\}$ を A のスペクトル半径 と呼ぶ。

かつ $r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ (四八回乗で八極める)

(たとえ $r(A) \leq \|A\|$ とたとえ)

Prop 8.8. A : 自己正規作用素 $\Rightarrow r(A) = \|A\|$

（証明）一般の H を自己正規作用素とすると。

$$(\star) \|A\|^2 = \sup_{\|H\|=1} \|AH\|^2 = \sup_{\|H\|=1} |(Hu, Hu)| = \sup_{\|H\|=1} |(H^2u, u)| \leq \sup_{\|H\|=1} \|H^2u\| \cdot \|u\| = \|H^2\| \leq \|A\|^2$$

$$\therefore \|A^2\| = \|H\|^2 \text{ である。}$$

（たとえ A^2 は適用する。）

$$\|A^{2^n}\| = \|A^{2^{n-1} \cdot 2}\| = \|A^{2^{n-1}}\|^2 = \|A\|^{2^n}$$

(A : 自己共役 $\Rightarrow A^* = A$ である) ($A^n u, v = (A^n u, A v) = \dots = (u, A^n v)$)

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|A\|$$

- 段階 1: A : 自己共役の用事 $\|A u, v\| = (u, A v)$ ($\forall u, v \in X$)

权重で $u = v$ とすると $(A u, u) = (u, A u) = \overline{(A u, u)}$ (複数)

物 $\forall u \in X$ の $(A u, u) \geq 0$ である時

A は NB 負 である上に、 $A \geq 0$ と書く。

- 段階 2: $A \in B(X)$ の時 (2)

$$Re A := \frac{1}{2}(A + A^*) , \quad Im A := \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

を A の 自己共役部、反自己共役部 と書く。
(self adjoint part) (skew-adjoint part)

時 $A = Re A + i Im A$ であり、 Re と $Im A$ は自己共役の用事である。

$$Re(A u, u) = (Re A u, u)$$

$$Im(A u, u) = (Im A u, u) \text{ が半立}$$

す、1 章での用事、(3) 用事が「自己共役の用事」で書かれておりが出来た所を示している。

- 段階 3: 位相の自己共役の用事 \wedge 過度な二例交換によって $L(X)$ の拡張
用事に交換される。

$A(X)$: 自己共役の用事とすると。

$\exists U: X \rightarrow L^*: \text{Unitary } \exists a: \text{複数の要数の並び}$

$$\text{s.t. } UAU^* f = af$$

(位相の用事)

宿題 1.

$X: \text{Hilbert 空間 } f \in X^*$ の時 $\exists w \in X$ s.t. $f(u) = (u, w)$ ($\forall u \in X$).

$$\|f\|_{X^*} = \|w\|_X \text{ であることを示せ。}$$

(解答)

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\|u\|=1} |f(u)| = \sup_{\|u\|=1} |(u, w)| \leq \sup_{\|u\|=1} \|u\|_X \|w\|_X = \|w\|_X$$

又、 $w=0$ の時 $\|f\|_{X^*} = 0$ である事も分かる。

$w \neq 0$ の時、 $w_0 = \frac{w}{\|w\|_X}$ とする。

$$\|w_0\|_X = 1, \quad f(w_0) = \frac{f(w)}{\|w\|_X}, \quad w = \frac{1}{\|w\|_X} (w, w) = \|w\|_X$$

$$\therefore \|f\|_{X^*} = \|w\|_X$$

宿題2 めぐれまいをりて対称定理を証明せよ。

<解答> ~~$\forall \epsilon > 0$~~ $\delta = \inf_{v \in M} \|x - v\|$ と置くと、

點列 $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に $\exists \epsilon > 0$

$\|x - v_n\| \rightarrow \delta$ ($n \rightarrow \infty$) を満たす物が存在す。

中間点より

$$\begin{aligned} 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - v_m\|^2) &= \|(x - y_n) + (x - v_m)\|^2 + \|(x - v_n) - (x - y_m)\|^2 \\ &= 4\|x - \frac{y_n + v_m}{2}\|^2 + \|v_m - y_n\|^2 \end{aligned}$$

$$0 \leq \|v_m - y_n\|^2 = 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - v_m\|^2) - 4\|x - \frac{y_n + v_m}{2}\|^2 \leq 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - v_m\|^2) - 4\delta^2$$

$n, m \rightarrow \infty$ の時、右端 $\rightarrow 2(\delta^2 + \delta^2) - 4\delta^2 = 0$ なので $y_n \rightarrow y$ である。

$\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 積分である。つまり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$$
 が存在する。

M に v が存在するので $v \in M$ 。

$$\|x - v\| = \min_{v' \in M} \|x - v'\| = \delta$$

任意の $h \in M$ に対して。

$$f(\theta) := \|x - v - \theta h\|^2$$

1) $\theta = 0$ の最小値 δ を取る。つまり $f'(0) = 0$ 。

$$f(\theta) = \|x - y\|^2 - 2\operatorname{Re}(x - y, h) + \theta^2 \|h\|^2$$

$$\text{2) } f'(0) = -\operatorname{Re}(x - y, h) = 0.$$

h の Re と ih を用いると

$$0 = \operatorname{Re}(x - y, ih) = \operatorname{Re}(-i(x - y), h) = I_m(x - y, h)$$

$$\text{故に } (x - y, h) = 0.$$

宿題3. X : Hilbert 空間 $A \in B(X)$

(1) $A^* A$ と $A A^*$ は自己共役である

(2) $A \in B(X)$ が自己共役であるための必要十分条件 $\|A\| = \sup_{\|u\|=1} |(Au, u)|$

<解答> (1) $(x, A^* A x) = (Ax, Ax) = \overline{(Ax, Ax)} = \overline{(x, A^* Ax)} = (A^* Ax, x)$
 $(AA^* x, x) = (A^* x, A^* x) = \overline{(A^* x, A^* x)} = \overline{(AA^* x, x)} = (x, AA^* x)$

$$(2) \sup_{\|u\|=1} |(Au, u)| \leq \sup_{\|u\|=1} \|Au\| \cdot \|u\| \leq \|A\|$$

又、 $(Au, v) = (u, Av) = \overline{(Av, u)}$ 。故に $(Au, u) \in \mathbb{R}$ 。

証明:

$$\operatorname{Re}(Au, v) = \frac{1}{2}(Au, v) + \frac{1}{2}(Av, u) = \frac{1}{4}(A(u+v), u+v) - \frac{1}{4}(A(u-v), u-v)$$

$s := \sup_{\|u\|=1} |(Au, u)|$ とする時

$$\text{式} \leq \frac{1}{4}s \|u+v\|^2 + \frac{1}{4}s \|u-v\|^2 = \frac{1}{2}s (\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

~~$$\|x\|=1, u=\sqrt{\|Ax\|}x, v=\frac{Ax}{\sqrt{\|Ax\|}}$$~~

とするとき

$$\|Ax\|^2 \leq \frac{1}{2}s (\|Ax\| + \|A^*x\|) = s \|Ax\|$$

$$(つまり) \|x\|=1 \text{ なら } \|A\| \|Ax\| \leq \sup_{\|u\|=1} |(Au, u)|$$

宿題4. X をうる Hiltbert 空間とす、 $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ を X 上に於ける完全正規直系とす。

$A \in B(X)$ に対して $\|A\|_{HS}$ を

$$\|A\|_{HS} := \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \|A\psi_j\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

で定める物とする。此時、 A は完全正規直系 $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ の私力才に満足してあり、 $\|A\| \leq \|A\|_{HS}$ であることを示せ。

($\|A\|_{HS} = +\infty$ となる場合もある)

$$<\text{解説}> \|A\|_{HS}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|A\psi_j\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |(A\psi_j, \psi_k)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |(\psi_j, A^*\psi_k)|^2$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |(A^*\psi_k, \psi_j)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|A^*\psi_k\|^2 = \|A^*\|_{HS}^2.$$

$\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ CX を X の $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ とすば、完全正規直系とす。

$$\|A\|_{HS}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|A\psi_j\|^2$$

とすると、

$$\|A\|_{HS}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|A\psi_j\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |(A\psi_j, \psi_k)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |(A^*\psi_k, \psi_j)|^2$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|A^*\psi_k\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|A\psi_j\|^2 = \|A\|_{HS}^2.$$

故に $\|A\|_{HS}$ の値と $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ の達心才とい甚実術てあり。

$\|u\|=1$ と $\|Au\|=\|A\|$ と假定すると。 (元徴性より存在)

$$\|Au\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(Au, \psi_j)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(A^*\psi_j, u)|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|A^*\psi_j\|^2 \|u\|^2 = \|A^*\|_{HS}^2 = \|A\|_{HS}^2$$

$$\therefore \|A\| \leq \|A\|_{HS}$$

十四

§9 幾何学ヒルベルト空間

定理 9.1 集合 H の上位函数 $f(x)$ の或る集合 H が Hiltbert Sp. とす。

(H の内積を (f, g) とす)

中間正値函数 $K(x, y)$ ($x, y \in \Omega$) が次の条件を満たす時
 K を H の 生核 とする。

(1) $\forall y \in \Omega$ に於いて, $K(\cdot, y) \in H$.

(2) $\forall y \in \Omega$, $\forall f \in H$ に於いて, $f(y) = (f, K(\cdot, y))$

($\Omega \subset H^*$ に属する時, $K(\cdot, y)$ は y の リス表現として H の要素)

$$\text{生核: } K(\cdot, y) = \lambda y, K(x, y)$$

#生核の例:

H が一次独立函数 $W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x)$ の持型積合函数

$$f(x) := \sum_{k=1}^n p_k W_k(x), \quad g(x) := \sum_{k=1}^n q_k W_k(x).$$

$$(1) \text{ に於いて } (f, g) := \sum_{i,j=1}^n d_{ij} p_i \bar{q}_j \text{ となる}$$

つまり d_{ij} は 正値を有する

$$(\text{つまり}, \sum_{i=1}^n |p_i|^2 \geq 0 \Rightarrow \sum_{i,j=1}^n d_{ij} p_i \bar{p}_j \geq 0)$$

(2) 條件を満たすと, (\cdot, \cdot) が内積となる

可積である時は, $d_{ij} = \overline{d_{ji}}$ を満せばよい。

$$(\because H(f) = (\overline{g}, f)$$

$$\therefore (f, f) \geq 0 \text{ で } (f, f) = 0 \iff f = 0)$$

$$d_{ij} = \overline{d_{ji}} \text{ である事。}$$

(3) (d_{ij}) が 值を有する事により $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ に於いて,

$$\begin{aligned} &= \sum_{i,j=1}^n d_{ij} (\lambda_1 p_i + \lambda_2 q_i) \overline{(\lambda_1 p_j + \lambda_2 q_j)} \\ &= |\lambda_1|^2 \sum_{i,j=1}^n d_{ij} p_i \bar{p}_j + \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \sum_{i,j=1}^n d_{ij} p_i \bar{q}_j + \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \sum_{i,j=1}^n d_{ij} \bar{p}_i q_j + |\lambda_2|^2 \sum_{i,j=1}^n d_{ij} q_i \bar{q}_j \geq 0 \end{aligned}$$

$$P = \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \sum_{i,j=1}^n d_{ij} p_i \bar{q}_j, \quad Q = \lambda_2 \bar{\lambda}_1 \sum_{i,j=1}^n d_{ij} q_i \bar{p}_j \text{ とする。}$$

$$(I_m(P+Q)) = 0 \iff I_m(P-\bar{Q}) = 0.$$

$$I_m(P-\bar{Q}) = I_m(\lambda_1 \bar{\lambda}_2 [\sum_{i,j=1}^n d_{ij} p_i \bar{q}_j - \sum_{i,j=1}^n \bar{d}_{ij} p_j \bar{q}_i]) = 0$$

$$\therefore I_m(\lambda_1 \bar{\lambda}_2 \sum_{i,j=1}^n [d_{ij} - \bar{d}_{ji}] p_i \bar{q}_j) = 0$$

(ここで $\lambda_1, \lambda_2, p_i, q_j$ の 任意性から $d_{ij} = \overline{d_{ji}}$) //

したがって $d_{ij} = \overline{d_{ji}}$ を代入すると,

$$|\lambda_1|^2 \sum_{i,j=1}^n d_{ij} p_i \bar{p}_j + 2 \operatorname{Re}(\lambda_1 \bar{\lambda}_2 \sum_{i,j=1}^n d_{ij} p_i \bar{p}_j) + |\lambda_2|^2 \sum_{i,j=1}^n d_{ij} q_i \bar{q}_j \geq 0.$$

(つまり)

$$|\lambda_1|^2 \|f\|^2 + |\lambda_2|^2 \|g\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda_1 \bar{\lambda}_2 (f, g)) \geq 0.$$

比で $\lambda_1 = \frac{(f, g)}{\|f, g\|} t, \lambda_2 = 1$ ($t \in \mathbb{R}$) とする。

$$\|f\|^2 t^2 + 2 |(f, g)| t + \|g\|^2 \geq 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

第式より $|(f, g)|^2 - \|f\|^2 \|g\|^2 \leq 0$. (Schwarz 不等式)

で定義が分かるから

$$\sum_{i=1}^n p_i|^2 > 0 \Rightarrow \left[\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} p_i = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \right] \text{ ではない。}$$

$P = (P_1, \dots, P_n)$ とすると. $A = (\alpha_{ij})$ にして.

$P \neq 0 \Rightarrow Ap \neq 0$. とあるので $\det A \neq 0$

従って $\det \bar{A} \neq 0$ となるので ~~det A~~.

$B = (\beta_{ij}) := (\overline{\alpha_{ij}})^T$ (\bar{A} の逆行列) とある。

$$A\bar{B} = I \iff \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{jk} = \delta_{ik} \quad \forall i, k.$$

比で $K(x, y) := \sum_{j=1}^n \beta_{ij} w_i(x) w_j(y)$ が H の再生核となる。

①の種の立場によると.

$$\begin{aligned} (f, K(\cdot, y)) &= \sum_{i, j=1}^n \alpha_{ij} p_i \bar{\beta}_{jk} w_k(y) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i w_i(y) = f(y) \end{aligned} \quad //$$

Th 9.2 (再生核の存在定理)^① Hilbert Sp. H に再生核が存在する事はハーバー定理である。

(証明) $K(x, y)$ と $K'(x, y)$ を H の異なる再生核とする。

$\exists y_0 \in H$ に $K(x, y_0) \neq K'(x, y_0)$ (x の実数として)

H の異なる元である。

$$\therefore 0 < \|K(\cdot, y_0) - K'(\cdot, y_0)\|^2$$

$$= (K(\cdot, y_0) - K'(\cdot, y_0), K(\cdot, y_0) - K'(\cdot, y_0))$$

$$= (K(\cdot, y_0) - K'(\cdot, y_0), K(\cdot, y_0)) - (K(\cdot, y_0) - K'(\cdot, y_0), K'(\cdot, y_0))$$

右邊第一項は K が再生核より $K(y_0, y_0) - K'(y_0, y_0)$

第二項は K' が再生核より $K(y_0, y_0) - K'(y_0, y_0)$

矛盾

//

Th 9.3 Hilbert Sp. H に再生核が存在する条件の必要十分条件八.

$\forall y \in H$ に対して. $\exists c_y > 0$ s.t. $|f(y)| \leq c_y \|f\|$ ($f \in H$).

此条件八をかたへるの強型汎延数: あるふと同値。

$y: H \rightarrow \mathbb{C}$

$y(f) := y \mapsto f(y)$

$$|y(f)| \leq c_y \|f\| \quad \forall f \in H.$$

(証明)

(必要性) $f(y) = (f, K(\cdot, y))$ (\because Schwarz の式を適用する)

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad |f(y)| &\leq \|f\| \cdot \|K(\cdot, y)\| \\ &= \|f\| \cdot (K(x, y), K(\cdot, y))^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\| K(x, y)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

右辺の定義から、 $K(y, y) = (K(x, y), K(\cdot, y)) > 0$ //

(十分性) $\forall y \in \mathbb{R}$ が H^1 の標準正規化とるので、Reisz の表現定理より。

$$\exists g_y \in H \quad (g_y = g_y(x) \text{ s.t. } f(y) = (f, g_y))$$

また、

$K(x, y) := g_y(x)$ と書ける。

十一. (2)

Cor 9.4. $H = Hilbert$ sp. $K: H \times H$ 両生核

$$\text{Def} \quad \sup_{\|f\|=1} |f(y)| = K(y, y)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{証} \quad \text{def} \sup \text{を取る } f \text{ は } f(x) = \frac{K(x, y)}{K(y, y)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\textcircled{2} \quad |f(y)| \leq \|f\| K(y, y)^{\frac{1}{2}} \text{ より. } \sup_{\|f\|=1} |f(y)| \leq K(y, y)^{\frac{1}{2}}.$$

式より $f(x) = \frac{K(x, y)}{\sqrt{K(y, y)}}$ と書く。

$$\|f\|^2 = \left(\frac{K(x, y)}{\sqrt{K(y, y)}}, \frac{K(x, y)}{\sqrt{K(y, y)}} \right) = \frac{1}{K(y, y)} K(y, y) = 1$$

$$\text{又. } f(y) = \sqrt{K(y, y)}$$

Th 9.5 両生核 H の意味で正定形算子である。

$\forall n, \forall y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in L$ にあ。

$$\textcircled{3} \quad \sum_{i=1}^n K(y_i, y_i) \overline{\xi_i} \xi_i \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{証} &\quad \left\| \sum_{i=1}^n K(\cdot, y_i) \xi_i \right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n K(\cdot, y_i) \xi_i, \sum_{j=1}^n K(\cdot, y_j) \xi_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (K(\cdot, y_i), K(\cdot, y_j)) \overline{\xi_i} \xi_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\xi_j} \xi_i K(y_j, y_i) \geq 0 \quad // \end{aligned}$$

Cor 9.6 両生核 H の条件を満たす。

$$(1) K(x, x) \geq 0 \quad (2) |K(x, y)| = \sqrt{K(y, y)} \quad (3) |K(x, y)|^2 \leq K(x, x) K(y, y)$$

(両生核 H の用を満たす)

<問題> (1) $\forall T \in \mathcal{L}(X, Y)$ の定義

(2) $\forall x, y \in X$ 成り立つ。

$$(K(-, x), K(-, y)) = (\overline{(K(-, y), K(-, x))})$$

(3) \forall Schwarz の反対称性。

$$\begin{aligned} |K(x, y)|^2 &= |(K(-, y), K(-, x))|^2 \\ &\leq \|K(-, y)\|^2 \cdot \|K(-, x)\|^2 \\ &= (K(-, y), K(-, y)) \cdot (K(-, x), K(-, x)) = K(y, y) \cdot K(x, x) \quad // \end{aligned}$$

7. 完備化空間

X : normed sp 上で

証明: $\exists \tilde{X}$: Banach sp. $\exists j: X \rightarrow \tilde{X}$: 単射で、 $\|jx\| = \|x\|$ 、 $j(x)$ は \tilde{x} で稠密

<問題> X_c を X の Cauchy 序列の全般と呼ぶ

$$\{x_n\}, \{y_n\} \in X_c \text{ かつ } \{x_n\} \sim \{y_n\} \xrightarrow{\text{def}} \|x_n - y_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

~ (1) 可逆関係と呼ぶ。既に因る可逆関係を

$$\tilde{X} = [\{x_n\}] = \{y_n \in X_c : \{x_n\} \sim \{y_n\}\} \in \tilde{X} := X_c / \sim \text{ と表す。}$$

(可逆関係の條件:

$$x \sim y \iff x_n y = y_n x; x_n y_n z = y_n x z.$$

(2) 可逆関係に依る集合は直和で表される。

i.e. ① $\forall \{x_n\} \in X_c$ に沿う $\{x_n\} \in [\{x_n\}]$

② $\{x_n\} \sim \{y_n\} \Rightarrow [\{x_n\}] = [\{y_n\}]$

③ $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ が“可逆で並んで並ぶ” $[\{x_n\}] \cap [\{y_n\}] = \emptyset$

\tilde{X} : 究型空間

$$\tilde{X} = [\{x_n\}], \tilde{y} = [\{y_n\}] \in \tilde{X}, a \in \mathbb{C} \text{ に沿う}$$

$$a\tilde{X} = [\{ax_n\}], \tilde{x} + \tilde{y} = [\{x_n + y_n\}] \text{ と置く事に因って}$$

\tilde{X} は群形空間上である。

① $\{x_n\}, \{y_n\}$ は Cauchy 序列とする。 $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ $\|y_n - y_m\| \rightarrow 0$ ($n, m \rightarrow \infty$)

② $\|(\tilde{x}_n + \tilde{y}_n) - (\tilde{x}_m + \tilde{y}_m)\| \leq \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| \rightarrow 0$.

\tilde{X} : normed sp.

$$\tilde{X} = [\{x_n\}] \in X \text{ に沿う} \quad \|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x_m\| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

$\{\|x_n\|\}_{n=1}^\infty$ は \mathbb{R} 上の Cauchy 序列である

$$\|\tilde{X}\| := \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \text{ と置く。}$$

証明: \tilde{X} は normed sp 上である。

① $\|\tilde{X}\| \geq 0$ の性質。

$$\|\tilde{X}\| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0 \iff x_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\|\alpha \tilde{X}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha x_n\| = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \alpha \|\tilde{X}\|$$

$$\|\tilde{x} + \tilde{y}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + y_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n\| + \|y_n\|) = \|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\|. //.$$

$x \in X$ として $x_n = x$ ($n=1, 2, \dots$) とする場合 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考へる.
 ④ 可換類 $Jx = [\{x_n = x\}] \in \tilde{X}$ と x を同一視するので.

$X \subset \tilde{X}$ とみなせる.

実際, $J: X \rightarrow \tilde{X}$ は单射で $\|Jx\| = \|x\|$ となる.

⑤ 单射ハ $Jx = Jy$ とあると他類 $[\{x_n = x\}] = [\{y_n = y\}]$
 と書いてあるので $x_n - y_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), $x = y$ が分かる.

$$\|Jx\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\| \text{ より OK.}$$

$\forall x \in X$ に就し, 互い素元 $x - \in \{x_n\}$ と看と.

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n, m \geq N, \|x_m - x_n\| < \epsilon,$$

$n \geq N$ に就し $Jx_n \in \tilde{X}$ を看と.

$$\tilde{x} - Jx_n = [\{x_m - x_n\}_{m=1}^{\infty}] \text{ とす,}$$

$$\|\tilde{x} - Jx_n\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\| \leq \epsilon.$$

$$\text{よって } \|\tilde{x} - Jx_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{すなはち } J(x) \text{ の稠密 } //.$$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を \tilde{X} の Cauchy 列と看と.

\tilde{x}_n の互い素元を $\{x_{k_n}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ と看と.

X の Cauchy に帰るから.

$$\exists k_n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall m > k_n, \|x_m^{(n)} - x_{k_n}^{(n)}\| \leq \frac{1}{n}$$

ここで $\tilde{x} = [\{x_{k_n}^{(n)}\}]$ と定めて $\tilde{x} \in \tilde{X}$ と看と.

$$\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{x} \quad (n \rightarrow \infty) \text{ と見るのを許せばよい.}$$

生、 $\tilde{x} \in \tilde{X}$ について $\forall \{x_{k_n}^{(n)}\} \in X_c$ (X の Cauchy 列) を示せばよい.

$$\|\tilde{x}_n - Jx_{k_n}^{(n)}\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_{k_m}^{(n)} - x_{k_n}^{(n)}\| \leq \frac{1}{n} \quad (A)$$

$$\text{よって. } \|x_{k_n}^{(n)} - x_{k_m}^{(n)}\| = \|Jx_{k_n}^{(n)} - Jx_{k_m}^{(n)}\|$$

$$\leq \|Jx_n^{(n)} - \tilde{x}_n\| + \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\| + \|\tilde{x}_m - Jx_{k_m}^{(n)}\|$$

$$\leq \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\| + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \rightarrow 0. \quad (B)$$

ゆえに $\{x_{k_n}^{(n)}\} \in X_c$ を示してある

よ.

$$(A) \text{より } \|\tilde{x} - \tilde{x}_n\| \leq \|\tilde{x} - Jx_{k_n}^{(n)}\| + \|Jx_{k_n}^{(n)} - \tilde{x}_n\| \leq \|\tilde{x} - Jx_{k_n}^{(n)}\| + \frac{1}{n}$$

$$(B) \text{より } \|\tilde{x} - Jx_{k_n}^{(n)}\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_{k_m}^{(n)} - x_{k_n}^{(n)}\| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{x}_m - \tilde{x}_n\| + \frac{1}{n}$$

二つを合せると.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{x} - \tilde{x}_n\| = 0$$

//.

Th 9.7. $K: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が次の条件 ③を満たすならば:

且つで 完善された正値函数の成る Hilbert sp. H を
 K が H の共生核である様に定める事が出来る。

③. $A_n, A_{y_1}, \dots, A_{y_n} \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ において.

$$\sum_{j,j=1}^n K(y_j, y_j) \alpha_j \overline{\alpha_j} \geq 0$$

<証明>

$$H_1 := \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j K(x, y_j) : A_n, A_{y_1}, \dots, A_{y_n} \in \mathbb{R}, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\forall f_1, g_1 \in H_1 \text{ において } (f_1, x) := \sum_{j=1}^n \alpha_j K(x, y_j), g_1(x) := \sum_{k=1}^m \beta_k K(x, z_k)$$

④ $(f_1, g_1)_1 := \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_j \overline{\beta_k} K(y_j, z_k)$ にて積を定める。

$K(y, z) = \overline{K(z, y)}$ を満たす。

④より. ($n=2$, $y_1=y$, $y_2=z$, $\alpha_1=\beta$, $\alpha_2=\gamma$)

$$0 \leq \underbrace{K(y, z)\beta\bar{\gamma}}_P + \underbrace{K(z, y)\gamma\bar{\beta}}_Q \quad \cdots \text{実数性。}$$

$$I_m P + I_m Q = 0.$$

$$0 = I_m(P - \bar{Q}) = I_m(K(y, z)\beta\bar{\gamma} - \overline{K(z, y)}\gamma\bar{\beta}) = I_m(\beta\bar{\gamma}(K(y, z) - \overline{K(z, y)}))$$

左、右の直意性より $K(y, z) = \overline{K(z, y)}$

ゆえに.

$$(y_1, f_1)_1 = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \overline{\beta_k} \alpha_j K(y_j, z_k) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j} \beta_k \overline{K(z_k, y_k)} = \overline{(f_1, g_1)_1}$$

更に ④より.

$$(f_1, f_1)_1 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_j \overline{\alpha_k} K(y_k, y_j) \geq 0.$$

$$\text{つまり } \|f_1\| = \sqrt{(f_1, f_1)_1} > 0.$$

この點で f_1 「有縁」 $\wedge f_1(x) \neq 0$ で有って $\|f_1\|_1 = 0$ となるのは不可能か。そこで R の其他要素へと導入す。

$$f_1 \sim f'_1 \iff \|f_1 - f'_1\|_1 = 0. \quad \|f_1 - f'_1\|_1 = \|f_1\| + \|f'_1\|_1$$

ゆえに上の同値類を $\tilde{f} = [f] = \{g \in H_1 : g \sim f\} \in H_2$

$$H_2 := H_1 / \sim$$

$\tilde{f} = [f]$, $\tilde{g} = [g]$ の代表元を f, g とすると、

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j K(x, y_j) \quad g(x) = \sum_{k=1}^m \beta_k K(x, z_k).$$

内積: $(\tilde{f}, \tilde{g}) := \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_j \overline{\beta_k} K(y_j, z_k)$ が既に空の H_2 に定義される。

\tilde{f}, \tilde{g} の代表元の内積が成り立つ

$$((f, g) - (f, g')) = (f, g) - (f, g') + (f, g') - (f', g')$$

特に $\|f\| \geq 0$ 且つ $f(x) = 0 \Leftrightarrow \|f\| = 0$.

(同様にして、 $K(x, y)$ を含む内積の代表元を $K(x, y_0)$ にして置く)
ゆでて K が H_2 の再生核の条件は次の様に満たす。

$$\forall y \in \mathbb{R}: \exists f \in H_2 \text{ 使得 } K(x, y) \in H_2 \text{ 且 } f \in H_2 \Rightarrow f(y) = (f, K(\cdot, y))$$

$$(K(x, y)) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n K(x, y) \text{ と表すと } \lambda \text{ が } \lambda_n$$

は (: H_2 を実数化して H とする。 (内積も H に拡張する)

の場合は H の要素は λ で定義された

是れゆえ λ として λ へと書かれてる。

① $\tilde{f} \in H$ にあって、 $\tilde{f} = [f_n]$ で $\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$ ($n, m \rightarrow \infty$)

Schwarz の不等式、 K : 再生核より。

$$|f_n(y) - f_m(y)| = (f_n - f_m, K(\cdot, y))$$

$$\leq \|f_n - f_m\| \cdot (K(\cdot, y), K(\cdot, y))^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|f_n - f_m\| \cdot K(y, y)^{\frac{1}{2}}$$

⑤ $|f_n(y) - f_m(y)| \leq \|f_n - f_m\| \sqrt{K(y, y)}$

従って $\forall y \in \mathbb{R}$ 使得して $\exists f_\infty(y)$ s.t. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = f_\infty(y)$

は K が H の再生核である。

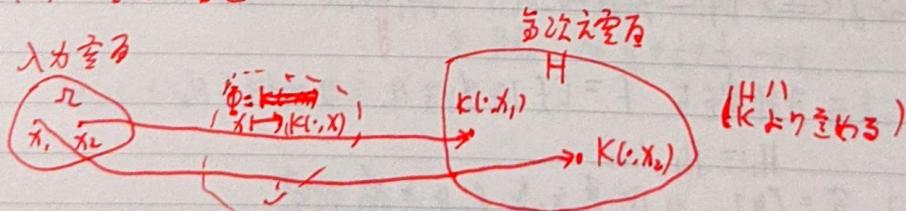
$\tilde{f} \in H$ にあって $\tilde{f} = [f_n]$ で $\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$ ($n, m \rightarrow \infty$)

⑤ より $\exists f_\infty(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y)$ となる。

$$f_n(y) = (f_n, K(\cdot, y)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{有積の連続性より}} f_\infty(y) = (f_\infty, K(\cdot, y))$$

$$(f = (\tilde{f}, K(\cdot, y)))$$

K が λ へると:



→ Ω : 特定集合 H : ヒルベルト空間

$$\Phi(\Omega) = \{K(\cdot, x) : x \in \Omega\} \text{ は } H \text{ の部分集合}$$

且し $f, g \in \Phi(\Omega)$ 使得して 内積を 再生核で 定義:

$$f = \sum_{j=1}^n \alpha_j K(\cdot, x_j), g = \sum_{k=1}^m \beta_k K(\cdot, y_k) \Rightarrow (f, g) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_j \bar{\beta}_k K(y_k, x_j)$$

以下の式としらべる:

$$(x_j)_{j=1}^N, (y_k)_{k=1}^M を N えたる j の重複とすると、 \\ f = \sum_{j=1}^N a_j x_j, g = \sum_{k=1}^M b_k y_k \Rightarrow (f, g) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M a_j b_k (x_j, y_k)$$

試験問題

1. X を norm $\|\cdot\|$ を持つノルム空間とする時, norm の連続性を示せ。つまり, $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ CX に於いて $n \rightarrow \infty$ の時 $u_n \rightarrow u$ in X であれば、 $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$ ($n \rightarrow \infty$) である事を示せ。

2. ノルム空間 X, Y の norm をそれぞれ $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ とする

(1) X から Y への有界な写像の全般の範囲を L^1 ノルムの空間を述べよ。

(2) X を有限次元ノルム空間, Y を Banach 空間, A を X から Y への有界な写像とする。此時 A は必ず有界であるか。理由を付けて答へよ。

3. 次の各方に致し答へよ。

(1) Hilbert 空間 X の有界汎函数 $f \in X^*$ の定義を述べよ

(2) $L^2(\mathbb{R})$ を有積 $(f, g) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$ を持つ Hilbert 空間とする; $L^2(\mathbb{R})$ の函数を $\{f_n\}$ で、任意の $g \in L^2(\mathbb{R})$ に就いて、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, g) = 0$ であるか、(and why) と並べて答へよ。

4. Hilbert 空間 X の有積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とある時、以下の各に致し答へよ。

(1) X の有界汎函数 A に就いてその逆の有界汎函数の定義を述べよ。

(2) X から X への有界汎函数 A について、單純で且つ常に稠密だが、主としてハダニの例を挙げよ。

(3) X の有界汎函数の族 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ を考へる。任意のベクトル $x, y \in X$ について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n x, y)$ が存在するならば、~~必ず~~ 或る有界汎函数 A が存在して $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n x, y) = (Ax, y)$ となる事を示せ。

解答

$$3.(2). f_n = \begin{cases} 1, & x \in (n-1, n] \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\forall n \neq m, \|f_n - f_m\|^2 = 2 > 0.$$

$$\forall g \in L^2(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} g(x) \overline{f_n(x)} dx < \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) \overline{f_n(x)} dx = 0.$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} g(x) \overline{f_n(x)} dx < \infty \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} g(x) dx < \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) f_n(x) dx < \infty \right)$$

No.

Date

2.(2) はい。

有限次元幾何学のルムの可換性定理:

X が有限次元幾何学である。すなはち、 $p, q \in X$ の任意のルムであると、

$\exists A, B > 0$.

$$\forall x \in X, Ap(x) \leq q(x) \leq Bp(x)$$